PROF : MBACKE MATHS SUJET 1 : 2026 NIVEAU : TERMINALE S2

EXERCICE 1 ① : 05,5 points

I)

On considère l'équation $E : z^4 = -8(1 + i\sqrt{3})$

1. Résoudre dans C l'équation $Z^4 = 1$ **(0,5pt)**

2. Soit $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

   (a) Ecrire α sous forme trigonométrique. En déduire que :

   $$\alpha^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$$

   (0,75pt)

   (b) Montrer que $\left(\frac{z}{\alpha}\right)^4 = 1$. En déduire les solutions de (E).**(1pt)**

II)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient $A(-\sqrt{3} + i)$, $B(1 + i\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3} - i)$ et $D(-1 - i\sqrt{3})$.

1. Faire une figure (Attention pas de calculatrice pour la valeur $\sqrt{3}$).**(0,5pt)**

2. Montrer que ABC est un triangle rectangle.**(0,25pt)**

3. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.**(0,25pt)**

III)

Soient $f : z' = -4iz + 1 - 4i$ et $g : z' = \frac{1}{4}iz + 1 - 2i$

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $f, g, f^{-1}, g^{-1}, g \circ f$ et $f \circ g$.**(1pt)**

2°)

Soit $T : z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$

a. Quelle est la nature de T.**(0,5pt)**

Soit D la droite d'équation : $x - y\sqrt{3} = 0$.

b. Quelle est l'équation de D', transformée de D ?**(1pt)**

c. Donner l'équation de C', transformé du cercle C de centre $A(1;2)$ et de rayon $R = 2$?

EXERCICE ② : 04 points

Soit (U_n) une suite arithmétique croissante telle que :

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = 9 \\ (U_1)^2 + (U_2)^2 + (U_3)^2 = 35 \end{cases}$$

1. Calculer le premier terme U_0 et la raison r de cette suite,
   puis exprimer le terme général U_n en fonction de n **(1pt)**

2. Soit V_n la suite définie par : $V_n = 2^{U_n}$
   (a) Montrer que V_n est une suite géométrique dont on déterminera V_0 et q **(1pt)**
   (b) On définit S_n et P_n par : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $P_n = V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_n$
      i. Exprimer S_n en fonction de n **(1pt)**
      ii. Exprimer P_n en fonction de n **(1pt)**

Problème : 10,5 points

Partie A :

Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$

1. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x)=-\frac{1}{x(x+1)^2}$ **(0,75pt)**

2. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. **(0,75pt)**

3. En déduire le signe de $g(x)$ **(0,5pt)**

Partie B :

Soit f définie sur par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1}-\ln(x+1) & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x>0\end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Montrer que $D_f=]-1;+\infty[$ **(0,75pt)**

2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0,75pt)**

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0,75pt)**

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats. **(1pt)**

4. (a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)$ **(0,5pt)**

   (b) Calculer $f'(x)$ sur l'autre intervalle. **(0,5pt)**

5. Dresser le tableau de variation de f **(1pt)**

6. Construire (C_f) (on prendra unité 2cm) **(1pt)**

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **(0,5pt)**

2. Calculer $h(1)$. h^{-1} est-elle dérivable en $\ln 2$? Si oui, calculer $(h^{-1})'(\ln 2)$. **(0,75pt)**

3. Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J **(0,5pt)**

4. Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2}x$$

   est une primitive de f sur $]0;+\infty[$ **(0,5pt)**