CONCOURS FASTEF 2025
CORRECTION EPREUVE MATHS

→cliquer ici pour voir la video de correction

(+221) 70 713 09 21 (+221) 77 192 07 07

MBACKE MATHS EPREUVE 2025 FASTEF : NIVEAU BAC

EXERCICE ① (10 points)

Pour chacun des items proposés, recopiez le n° de l'item et le(s) résultat(s) juste(s) correspondant(s), s'il(s) existe(nt), et justifiez vos choix.

① . Tout rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est un

a. *carre.* .

b. trapèze.

c. hexagone.

② . Soit S une transformation du plan telle que, si A' et B' sont les images de deux points arbitraires A et B alors les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. Donc S peut être

a. une translation.

b. une rotation d'angle aigu.

c. une homothétie.

d. une symétrie orthogonale.

③ . Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, et H le point défini par

$$\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC}+2\vec{OH}=\vec{0}.\text{ Alors } H \text{ est}$$

a. le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

b. l'orthocentre du triangle ABC.

c. est le centre de gravité du triangle ABC.

d. aligné avec O et le centre de gravité du triangle.

4 . Si $u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ et $v_n = \sin\left(\frac{3}{2n\pi}\right)$ alors

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

a. $(\mathrm{u}_n)_{n\in N}$ diverge

et

$(v_n)_{n\in N} converge.$

a. $(\mathrm{u}_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ sont divergentes.

b. $(\mathrm{u}_n)_{n\in N}$ n'a pas de limite et

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

5 . Pour tout réel $x, \cos x + \sin x$ est égal à

a. $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

a. $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

a. $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

a. $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

6 . L'ensemble

$$E=\left\{M(z)/\left|\frac{z-1}{1+iz}\right|=\sqrt{2}, z\in C\right\} \text{ est}$$

a. une droite.

b. un cercle.

c. le cercle de centre $A(1+i)$ et de rayon 1.

d. le cercle de centre $I(-1+2i)$ et de rayon 2.

7 . Si f et g sont deux applications telles que $g \circ f$ est bijective, alors

a. f $\circ g$ est bijective.

b. g est injective.

c. f est injective.

d. f est bijective.

8 . La solution du système

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \text{ dans } Q^* \times D \text{ est}$$

a. $\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$.

a. $\emptyset$.

a. $\left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$.

a. $(2, -3)$.

PROBLEME ① (10 points)

On considère la fonction $f_a : [0, +\infty[\to R$ définie par :

$$f_a(x) = \ln\left[\left(\sin(x) - x + \frac{x^3}{6\cos(\delta\pi)}\right)^{\cos(\pi E(a))}\right]$$

où

- δ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} G\left(\sin^3\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)\right)$.
- G est la primitive sur $[0, +\infty[$ vérifiant $G(0) = 0$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^4+1}{x^4+x^2+1}$.
- a est la solution dans $[0, +\infty[$ de l'équation $G(x) = \pi$.
- $E(a)$ la partie entière de a.

On ne cherchera pas à exprimer $G(x)$.

PARTIE A

On définit sur $[0, +\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = G(x) - x$ et $K(x) = G(x) - \frac{2}{3}x$.

1. Étudier sur $[0, +\infty[$ les variations de H et K. 0,5 pt
2. En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $\frac{2}{3}x \leq G(x) \leq x$. 1,5 pt
3. Démontrer que l'équation $G(x) = \pi$ admet une unique solution a sur $[0, +\infty[$. 0,5 pt
4. Montrer que $E(a) = 3$ ou $E(a) = 4$. 0,5 pt

PARTIE B

On considère les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $\varphi_1(x) = \sin(x) - x$;
$\varphi_2(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ et $\varphi_3(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

1. Étudier les variations de φ_1, φ_2, et φ_3. 1,5 pt
2. En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. 0,5 pt
3. Soit $n \in N^*$. Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, $\sin^3\left(\frac{k\pi}{n^2}\right) \geq 0$. 0,5 pt

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in N^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. 0,5 pt

5. Montrer que pour tout réel x, on a : $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$. 0,5 pt

6. Montrer que pour tout $n \in N^*$, $\frac{-k^3\pi^3}{12n^6} \leq G\left(\sin^3\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)\right) \leq \frac{27}{24}\frac{k^3\pi^3}{n^6}$. 0,75 pt

7. En déduire que $\frac{-\pi^3 n^2(n+1)^2}{48n^6} \leq u_n \leq \frac{27\pi^3 n^2(n+1)^2}{96n^6}$. 0,5 pt

8. Calculer alors la valeur de δ. 0,25 pt

Partie C

1. Déterminer le domaine de définition de f_4, puis les limites aux bornes. 1 pt

2. Étudier les branches infinies de f_4. 0,5 pt

3. Dresser le tableau de variation de f_4, puis construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. 1pt

4. Expliquer comment on obtient la courbe représentative de f_3 à partir de celle de f_4, puis tracer la courbe représentative de f_3. 0,5 pt