



# Institut MBACKÉ MATHS

Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez

**MATHEMATIQUES**

**POLYNOMES**

**PREMIERE S1**

**CORRECTION DISPONIBLE EN VIDEO DANS NOS COURS EN LIGNE INTERNATIONAL**

**YOUTUBE : MBACKE MATHS**

**+221 70 713 09 21**

**PROF : MBACKE MATHS**

**ANNEE : 2024-2025**

**NIVEAU : PREMIERE S1**

◇ **EXERCICE N°1**

- 1) Déterminer le réel  $a$  pour que l'on puisse mettre  $x + 2$  en facteur dans le polynôme  $p$  tel que  $p(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax - 84$
- 2) Factoriser le polynôme  $p$ .
- 3) Résoudre l'inéquation  $p(x) > 0$

◇ **EXERCICE N°2**

Factoriser le trinôme  $x^2 - x - 2$

Déterminer les réel  $a$  et  $b$  pour que le polynôme

$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + ax + b$  soit divisible par le polynôme  $x^2 - x - 2$

Résoudre l'inéquation  $p(x) \leq 0$

◇ **EXERCICE N°3**

Déterminer, s'il en existe,  $f(x)$  polynôme de degré 3 tel que :

$f(x) - f(x-1) = x^2 + x$ . En déduire la somme :

$S = (1 \times 2) + (2 \times 3) + \dots + n(n+1)$ . Où  $n$  est un entier naturel non nul.

◇ **EXERCICE N°4**

1)

a) Déterminer un polynôme  $P$  de degré 2 tel que  
 $P(0) = 0$  et  $P(x + 1) - P(x) = x$  En déduire que

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Déterminer un polynôme  $P$  de degré 3 tel que  
 $P(0) = 0$  et  $P(x) - P(x - 1) = x^2$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

2) Soit  $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ ;  $a, b$  et  $c$  ses trois racines. Sans calculer  $a, b$  ou  $c$ . Calculer  $S = a + b + c$ ;  $P = abc$ ;

$$T = ab + bc + ac; Q = a^2 + b^2 + c^2; K = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ et}$$

$$L = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

### ◆ EXERCICE N°5

Soit le polynôme  $P(x) = x^4 - 13x^3 + 48x^2 - 52x + 16$

1) Montrer que 0 n'est pas racine de  $P(x)$

2) Montrer que pour tout  $x \neq 0$

$$P(x) = x^2 \left( x^2 - 13x + 48 - \frac{52}{x} + \frac{16}{x^2} \right)$$

3) En posant pour tout  $x \neq 0$   $X = \frac{4}{x} + x$  Exprimer

$$x^2 - 13x + 48 - \frac{52}{x} + \frac{16}{x^2} \text{ en fonction de } X$$

4) En remarquant que  $x \neq 0$  montrer que

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{4}{x} + x \\ Q(x) = 0 \end{cases} \text{ où } Q(X) = X^2 - 13X + 40$$

5) En déduire la résolution de  $P(x) = 0$

*Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez*

### ◆ EXERCICE N°6

On se propose de résoudre l'équation (E):  $x^3 - 9x^2 + 6x + 56 = 0$

a) On pose  $x = X + a$  où  $a \in \mathbb{R}$

Montrer que l'on est alors amené à résoudre l'équation

$$(E'): X^3 + (3a - 9)X^2 + (3a^2 - 18a + 6)X + a^3 - 9a^2 + 6a + 56$$

- b) Démontrer qu'il existe une valeur de  $a$  pour laquelle  $(E')$  est équivalente à une équation de la forme :  $X^2 + px + q = 0$  où  $p$  et  $q$  sont des réels à déterminer.
- c) Résoudre  $(E')$  et en déduire les solutions de  $(E)$ .

### ◇ EXERCICE N°7

- 1) Un polynôme  $P(x)$ , divisé séparément par  $(x - 1)$  ; par  $(x - 2)$  et par  $(x + 2)$  donnent respectivement pour restes 6 ; 18 et -3. Quel reste donnera-t-il si on le divise par le produit  $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$  ?
- 2) Déterminer les polynômes de degré 3 dont les divisions par  $x - 1$ , par  $x - 2$ , par  $x - 3$  ont le même reste 36. Déterminer celui d'entre eux qui est divisible par  $x + 4$

### ◇ EXERCICE N°8

- 1) Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre réel  $x$ , on ait :  $a(x^2 + 9) + b(x^2 - 9) = 6^3$
- 2) Déterminer les nombres réels  $c$  et  $d$  tels que, pour tout nombre réel  $x$ , on ait :  $c(x + 3) + d(x - 3) = 12$
- 3) On considère la fraction rationnelle  $f$  définie :

$$f(x) = \frac{6^3}{x^4 - 81}$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- b) Déduire de la première question qu'il existe deux nombres réels  $\alpha'$  et  $\beta'$  tels que, pour tout élément  $x$  de  $D_f$  on ait :

$$f(x) = \frac{\alpha'}{x^2 + 9} + \frac{\beta'}{x^2 - 9}$$

- c) Démontrer qu'il existe trois nombres réels,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  de  $D_f$  tels que, pour tout élément  $x$  de  $D_f$  on ait :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x + 3} + \frac{\beta}{x - 3} + \frac{\gamma}{x^2 + 9}$$

### ◇ EXERCICE N°9

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels distincts. On définit le polynôme  $P$  par

$$P(x) = a^2(b - x) + b^2(x - a) + x^2(a - b)$$

- 1) Démontrer qu'il existe un polynôme  $P_1$  tel que, pour tout nombre réel  $x$ :  $P(x) = (x - a)(x - b)P_1(x)$
- 2) Quel est le degré de  $P_1$ ? Déterminer  $P_1$ . En déduire une factorisation de  $P(x)$ .

### ◆ EXERCICE N°10

$a, b$  et  $c$  étant trois réels distincts

1) Soit  $P(x) = A \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + C \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

Calculer  $p(a), p(b)$  et  $p(c)$

2) Soit  $P(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1$

- a) Quel est maximal de  $q$  ?
- b) En utilisant 1) montrer que  $q(x)$  admet racines
- c) Que peut-on dire de  $q(x)$  et pour le polynôme

$$h(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} ?$$

### ◆ EXERCICE N°11

1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  de façon que 1 soit racine double du polynôme  $P(x) = ax^5 + bx^4 + 1$

2) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  de façon que le polynôme  $P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$  soit divisible par  $(x - 1)^2$

### ◆ EXERCICE N°12

On se propose de résoudre une équation de degré 3 ne possédant pas, a priori, de solution particulière.

A. Soit le polynôme  $P(x) = 10x^3 - 9x^2 + 9x + 1$

1) On pose  $x = y + a$  Déterminer le polynôme  $Q(y)$  obtenu en remplaçant  $x$  par  $y + a$  dans  $P(x)$

2) Montrer que :  $Q(y) = 10(y^3 + \alpha y + \beta) \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{10}; \alpha = \frac{63}{100}$  et

$$\beta = \frac{79}{250}$$

B. Cette partie a pour but de déterminer les racines de  $Q(y)$ .

1) Déterminer deux réels  $b$  et  $c$  tels que :  $b^3 + c^3 = \beta$  et  $-3bc = \alpha$

2) Prouver que :  $y^3 - 3bcy + b^3 + c^3$  est factorisable par  $y + b + c$

Déduire de B.2. et A.1. A.1. que  $-\frac{2}{5}$  et  $-\frac{1}{10}$  sont respectivement solutions de  $Q(y)$  et  $P(x)$

Terminer la résolution de  $P(x) = 0$

### ◇ EXERCICE N°13

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $b = a + 1$

1) Démontrer que pour tout entier naturel strictement positif;  
 $a^2 + b^{2n} - 1$  est divisible par  $ab$ .

2) En déduire un diviseur de  $121 + 12^{2004} - 1$

3) Démontrer que si  $n$  est impair  $x^n + 1$  est factorisable par  $x + 1$

4) Démontrer que  $p(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$  est divisible par  $(x - 1)(x^2 - 1)$

### ◇ EXERCICE N°14

1) Vérifier que  $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1})$

2) Montrer que le polynôme  $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ) est factorisable par  $(x - 1)^2$

3) Soient  $p(x)$  et  $q(x)$  deux polynômes tels que  $q(x) = p(x) + 1$

Démontrer que  $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$  est factorisable par  $p(x).q(x)$

En déduire que  $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$  est factorisable par  $(x - 2)(x - 1)$

1) Montrer que  $p(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$  est factorisable par  $q(x) = x(x + 1)(2x + 1)$  Expliciter  $r(x)$  tel que

$$p(x) = q(x).r(x)$$