**BTS** | **TD : MATRICES** | **2EME ANNEE**



**PROF : MBACKE MATHS** | **ANNEE : 2024 - 2025** | **NIVEAU : BTS 2EME ANNEE**

## EXERCICE 1

On considère les matrices d'ordre 3 suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ at } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M^3 - 5M^2 + 4M$.
2. Déduire de la question 1) que la matrice $M$ est inversible et donner la matrice inverse de $M$ notee $M^{-1}$ $(\mathbf{1+2})$ **pts**
3. Déduire des résultats précédents les solutions du système d'équations

$$(S)\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases} \qquad (\mathbf{2}) \ \textbf{pts}$$

## EXERCICE 2



On considère les matrices d'ordre 3 suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A et déduire que A est inversible.

(1,5pt)

2. Calculer la matrice $A[B-2I_3]$ puis déduire la matrice inverse de $A$.
(2+1) pt

3. Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 4x - 2y + 6z = 1 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ -x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

a. Existe-t-il un réel $\alpha$ tel que le triplet $(\alpha, \alpha, 0)$ soit solution de (S). Justifier votre réponse (1pt)

b. Déduire des résultats précédents les solutions du système d'équations (S). (2,5) pts

## EXERCICE 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer la matrice $A^2$. (1pt)
2. Trouver les réels $a$ et $b$ tels que $A^3 = aA^2 + bA$ (2 pts)
3. Déduire de la question 2) que la matrice A est inversible. Donner l'expression de la matrice inverse de A notée $A^{-1}$.
(3 pts)
4. Soit le système suivant :

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y + z = -1 - x \\ x + y = 3 - 2z \end{cases}$$

a) Donner l'écriture matricielle du système (S). (1pt)
b) En déduire la solution du système (S). (1pt)

## EXERCICE 4

Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice $M$ définie par : $M = A^3 + 3A^2 + 6A$

1. Déterminer la matrice $M$ (4 pts)
2. Déduire du calcul que $A$ est inversible et donner son inverse $A^{-1}$ **( 2pts)**
3. Soit le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} -2x + y - z = 3 \\ -x + y + 2z = -2 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

a) Donner sans faire de calcul le nombre de solution du système (S), (1 pt)

b) Déduire la(les) solutions du système (S). ( 2 pts)

## EXERCICE 5

On considère la matrice $A$ suivante : $A = \begin{bmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{bmatrix}$

1. Calculer le déterminant de $A$.
2. Déterminer les nombres réels a pour lesquels le déterminant de $A$ est nul, s'ils existent.
3. On considère les vecteurs $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) On considère le système écrit matriciellement $AX = B$. Résoudre ce système pour le cas $a = 0$.



b) On pose $a = 1$, soit $I$ la matrice unité d'ordre 3 calculer les matrices $D$ et $C$ sous forme de lignes et de colonnes avec $D = (A + 2I)^2$ et $C = (I - A)(A + 2I)^2$.

## EXERCICE 6

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

1. Montrer que la matrice est inversible.
2. Déterminer l'inverse $\mathbf{A}^{-1}$ de la matrice $A$.
3. On considère le système suivant, $m$ un paramètre fixé.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ -x - 3y + z = m \\ -2x - 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède une solution du système.

## EXERCICE 7

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A \cdot I$

b) En déduire que $A$ est inversible et donner son inverse

c) En déduire la solution du système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -y + +z = 3 \end{cases}$$

## EXERCICE 8



On considère les matrices suivantes :

$M = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a$ et $b$ deux nombres réels:

1. Calculer $M^2 - MM$
2. Exprimer (a.b) M.M' en fonction de a, b et de $I_3$

3. On suppose que le produit $ab$ est non nul.

   a) Montrer que le résultat de la deuxième question permet de déterminer une matrice carrée d'ordre 3, $P$ telle que $P.M - I_3$,
   b) Écrire cette matrice P en fonction de a et de $b$ seulement:

4. On considère lo système suivant :

$$\begin{cases} ax + (1-a)y = 1 \\ by = -3 \\ (1-a)y + az = 2 \end{cases}$$

Déduire do ce qui précède une solution matricielle du système précédent. On suppose que le produit ab est non nul

## EXERCICE 9

On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^2$ puis montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ que l'on déterminera tels que :

$$A^* = a.A + b \cdot I_2.$$

2) En déduire la matrice $A$ est inversible et exprimer $A'$en fonction de $A$ et $I_2$
3) En déduire la solution du système :

$$\begin{cases} x - 3y + 6z = 1 \\ 4x - 8y + 12z = 0 \\ 3x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$$


Institut
MBACKÉ MATHS
ENCADREMENT
BTS
en ligne
1ÈRE ANNÉE
2ÈME ANNÉE
Encadreur
Mbacké
Maths
MATHEMATIQUE
ELECTROTECHNIQUE
Inscription
+221 70 713 09 21
www.mbackemaths.com