BTS | **TD : TRANSFORMATION DE LAPLACE** | **2EME ANNEE**

PROF : MBACKE MATHS **ANNEE : 2024 - 2025** **NIVEAU : BTS 2EME ANNEE**

EXERCICE 1

On considère les expressions suivantes

$F(p) = \frac{1}{p(n^2-2p-1)}$ et $G(p) = \frac{1}{(p^2-4)(n^2-2n-3)}$ ou $p \in \mathbb{R}$

1. Décomposer en eléments simples $F(p)$ et $G(p)$ En déduire les originaux respectifs $f(t)$ et $g(t)$ de $F(p)$ et $G(p)$. $(\mathbf{1,5+1,5})$ **pts**

2. Déduire des résultats précédents la solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' - 3y = 1 + \text{ch}(2t) - \text{arac}\, y'(0) = y(0) = 0. \quad (1\text{pt})$$

Où ch est la fonction cosinus hyperbolique.

EXERCICE 2

On considère les expressions suivantes :

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2(p-1)} \text{ et } F_2(p) = \frac{1}{p(p-1)}$$

1. Montrer que

a) $F_1(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$ (1,5 pt)

b) $F_2(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ **(0,5pt)**

En déduire les originaux respectifs $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de $F_1(p)$ et $F_2(p)$. (1+0,5) pts

c) $\mathcal{L}[tu(t-1)] = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)e^{-p}$ où $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace. **(1, 5) pts**

2. Déduire des questions précédentes la solution de l'équation différentielle $x'(t) - x(t) = tu(t-1)$ avec $x(t) = 0$ **(1pt)**

EXERCICE 3

Les parties A et B sont indépendantes :

A) Montrer que $y = (\alpha + \beta x)e^x + \gamma e^{2x} - x - 4$ (avec α ; β et γ des réls) est solution de l'équation : $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. (3pts)

B) Résoudre le système différentiel suivant par la méthode de la transformée de Laplace :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - y' + \cos(3t) = 0 \\ 2y + x' + \sin(3t) = 0 \end{cases} \text{avec } x(0) = 1 \text{ et } y(0) = -1$$

(3pts)

EXERCICE 4

On note $\overline{f(p)} = \frac{5}{p(6p^2+p+2)}$

1. Trouver les réels a, b et c tels que:

$\overline{f(p)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{6p^2+p+2}$ (1,5pt)

2. Déterminer l'original $f(t)$ de $\overline{f(p)}$ (2pts)

3. Déterminer l'image de $g(t) = f(t-3)$ et $h(t) = e^{2t}f(t)$. **(2. 5pts)**

EXERCICE 5

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 3y = 1 + 2e^{-5x}$; $\qquad y(0) = 0.$
2. $y'' - y' = \sin 2x$; $\qquad y(0) = y'(0) = 1$
3. $y'' + y' - 2y = x^2 - 3x + 1; y(0) = y'(0) = 0$

EXERCICE 5

Soit la fonction $f(x) = 1 + 2e^{-5x}$

1. Calculer la transformée de Laplace de f.
2. Calculer la transformée de Laplace de f, dérivée de la fonction f.
3. Calculer l'originale de la fonction $G(p) = \frac{p}{p^2-16}$

EXERCICE 6

1. Trouver les réels a, b et c tels que :

$$\frac{p^2-6p+10}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{a}{p-1} + \frac{b}{p-2} + \frac{c}{p-3}$$

2. On considère l'équation différentielle :
$y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, y(0) = 1, y'(0) = 0.$On admet que $y(t)$ admet une transformée de Laplace $F(p)$. Démontrer que $F(p) = \frac{p^2-6p+10}{(p-1)(p-2)(p-3)}$ en déduire $y(t)$

EXERCICE 7

1. Soit F une fonction définie par $F(p) = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+1}$

   a) Déterminer les coefficients a, b et c si $F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$

   b) Déterminer l'original f de la fonction F.

2. Soit g une fonction définie pour $t > 0$, par $g(t) = 1$ - cost.
   a) Déterminer l'image de g.
   b) En déduire les images de $\text{tg}(t)$ et $e^t g(t)$.

EXERCICE 8

Soif $\omega \in R$ on pose $f(x) = x\sin \omega x$.

a) monter que $f''(x) = 2a + \cos \omega x - \omega^2 f(x)$.

b) En déduire la transformée de Laplace de $f(x)$.

c) de quelle fonction $\frac{P}{(P^2+3)^2}$ est-elle la transformée de Laplace ?

EXERCICE 9

$$\text{Soit } F_1(p) = \frac{4P+3}{p(p+1)(11p+6)}$$

a) Trouver les constantes A, B, C telles que $F_1(p) = \frac{A}{r} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{11p+6}$

b) En déduire l'originale $f_1(t)$ de $F_1(p\ )$

c) On pose $S_2(t) = \text{t}^2 . f_1(t)$ où $f_1(t)$ est l'original de $F_1(p)$ à la question Calculer l'image de $F_2(p)$ de la fonction $S_2(t)$

d) On pose $S_2(t) = \sin(2t) . f_1(t)$. Calculer $F_2(t)$ de la fonction $S_2(t)$