MATHEMATIQUS | PROBABILITE | TERMINALE S2

PROF : MBACKE MATHS ANNEE : 2024-2025 NIVEAU : TERMINALE S

EXERCICE N°1

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Dans une classe de 10 élèves ;2 élèves ont trichés pendant un devoir.

1) Un professeur choisit n élèves dans cette classe.

Calculer la valeur minimale de n pour que la probabilité d'avoir au moins un tricheur-parmi ces n élèves soit supérieur ou égale $0;9$.

2). Chacun des 2 élèves tricheurs porte le $\mathrm{N}°1$

Chaque autre élève porte le $\mathrm{N}°0$.

On choisit 3 élèves dans la classe. Soit X la variable aléatoire égale la somme des numéros portés par les trois élèves.

a) - Donner la loi de probabilité de X.

b) - Calculer l'espérance mathématique de X.

c) - Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.

EXERCICE N°2

Un porte-monnaie contient 2 pièces de $50F$ et n pièces de $100\mathrm{F}$.

1) Un enfant prend une pièce au hasard puis la remet dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité pour qu'il ait tiré une pièce de 100 F ?

2) L'enfant prend 2 pièces au hasard puis les remet. Quelle est la probabilité pour qu'il ait extrait 2 pièces de 100 F ?
3) L'enfant prend 4 pièces au hasard puis les remet. Quelle valeur faut-il donner à n pour que la probabilité pour qu'il ait tiré exactement 300 F soit $\frac{1}{11}$?
4) Dans cette question ; on donne $n = 10$.
L'enfant tire simultanément 4 pièces. Soit X la variable aléatoire égale à la somine tirée. Quelle est la loi de probabilité de X ainsi que son espérance mathématique.

EXERCICE N°3

Une épreuve consiste à tirer une boule d'un sac contenant cinq boules numérotées de 0 à 4. On note P_n la probabilité de tirer la boule numérotée n. Les réels sont les cinq premiers termes d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{20}$.

1) - Calculer $P_0; P_1; P_2; P_3; P_4$. (On donnera les résultats sous forme décimale).
2) -Soit X la variable aléatoire réelle qui prend les valeurs $0; 1; 2; 3; 4$ avec les probabilités respectives $P_0; P_1; P_2; P_3; P_4$.
Calculer l'espérance mathématiques de X et son écart-type.
3) On procède à cinq tirages successifs d'une boule avec remise.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois une boule de numéro impair ?

EXERCICE N°4

Un test est composé de 5 questions auxquelles on doit répondre par oui ou par non. Chaque réponse correcte est +4 ; chaque réponse fausse est notée -2. Un candidat répond au hasard à chacune des questions. On définit 2 variables aléatoires. X et $\mathbf{Y}$ de la manière suivante :

X : nombre de réponses exactes;

Y : après avoir fait la somme S des 5 notes partielles. On prend le plus grand des 2 nombres S ou $0 (Y = \sup(S; 0); Y$ ne peut donc être négative).

1. Quelle est la loi de probabilité de **X** ?
2. En déduire la loi de probabilité et l'espérance mathématique de X. :
3. Quelle la probabilité pour que $Y \geq 10$?

EXERCICE N°5

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3
U_2 contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes ;
U_3 contient 5 jaunes, 4 boules rouge et 1 boule verte.

Description de l'épreuve

L'épreuve consiste à tirer une boule dans U_1.
Si elle est verte on la met dans U_2 puis on tire une boule dans U_2.
Si elle est rouge; on la met dans U_3 puis on tire une boule dans U_3

Question

A) 1) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte.

2) Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première est rouge

3) En détruire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage.

4) Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage.

5) Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au-deuxième tirage.

B) Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :

- Une boule verte, on gagne 1000 F
- Une boule jaune, on gagne 500 °F
- Une boule rouge, on perd 500 F

Soit X là variable aléatoire qui à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer l'espérance mathématique de X

C) Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante. Les résultats seront donnés au centième prés par défaut.

1. Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au deuxième tirage
2. Calculer la probabilité pour seulement les-8 premiers obtiennent une boule verte au deuxième tirage
3. Calculer la probabilité pour qu'au-moins un élève ail une boule verte au second tirage.

EXERCICE N°6

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre e six qui portent le nombre $\frac{1}{e}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés. A cette expérience, on associe le point M d'affixe $z = \ln x + i\ln y$.

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \bar{1}, \bar{J})$ déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A: "M appartient à l'axe des abscisses" ;

   B : "M appartient à l'axe des ordonnées",

   C: "M appartient aux deux axes" ;

   D: "M n'appartient à aucun des axes" ;

   E: "l'angle $(\bar{\imath}, \overrightarrow{OM})$ est égal à $\frac{\pi}{4}$ ";

   F : "le point M appartient au cercle trigonométrique ".

2. Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM.

   d) Déterminer la loi de probabilité de X.

   e) Déterminer la fonction de répartition de X.

EXERCICE N°7

1. On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 . On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Les p_i vérifient:

$$p_1 = p_2; p_3 = p_4 = 2p_i; p_5 = p_6 = 3p_1;$$

a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement 4 : « obtenir 3 ou 6 » est égale à $\frac{5}{12}$.

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer

une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6 ; il se place à 5 m de la cible et lance la fléchette sur la cible; à 5 m; la probabilité d'atteindre la cible est alors de $\frac{3}{5}$.

Si l'événement A n'est pas réalisé; il se place à 7 m de la cible et lance la fléchette ; à 7 m; la cible est atteinte avec une probabilité égale à $\frac{2}{5}$.

On note C l'événement: « la cible est atteinte».

a) Déterminer $p(C/A)$ et $p(C/\bar{A})$.

En déduire que $p(C) = \frac{29}{60}$.

b) Déterminer $p(A/C)$.

3. Le joueur dispose de 10 fléchette qu'il doit lancer une à une ; de façon indépendante; dans les mêmes conditions que précédemment définies.

Calculer la probabilité pour qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

EXERCICE N°8

Dans un pays donné; la maladie du sida touche cinq pour mille de sa population.

Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0.8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0.9.

On note : T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie »

M « l'évènement être malade »

$\bar{\mathrm{M}}$ est l'évènement contraire dè M.

On rappelle que pour tous évènements A et B on a :

(*) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.

1. a) Réécrire la relation (1) pour $A = T$ et $B = M$ puis pour $A = \bar{M}; B = \bar{T}$
   b) En déduire que $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{M}})[1 - \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{\mathrm{T}})]$
2. Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.
3. a) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.
   b). Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

EXERCICE N°9

Une porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 FCFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte monnaie.

1. Calculer la probabilité de l'événement A: : tirer trois pièces de 500 F».
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
3. L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le portemonnaie.
   Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

EXERCICE N°10

Un sac contient quatre jetons rouges numérotés $1; 2; 3; 4$ et quatre jetons noires numérotés $1; 2; 3; 4$.

1. Un joueur tire au hasard et simultanément deux jetons du sac. On convient de la règle suivante :
   s'il tire les deux jetons numérotés 1; il gagne 600 F.
   s'il tire deux jetons de la même couleur; il gagne 200 F.

2.

Dans tous les autres cas il perd 200 F.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il tire deux jetons numérotés 1?

b) Quelle est la probabilité pour qu'il tire deux jetons de la même couleur ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'il perde 200 F ?

3. Après le premier tirage ; le joueur remet les deux jetons tirés dans le sac et procède à un deuxième tirage de deux jetons ; en convenant de la même règle. Soit X la variable aléatoire qui à deux tirages successifs associe le "gain" du joueur (positif ou négatif).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) En déduire la probabilité pour que le gain du joueur soit au moins égal à 400 F.

EXERCICE N°11

Une urne contient dix boules : une boule porte le chiffre 0 ; trois boules portent le chiffre 1; et six boules portent le chiffre 2. On extrait simultanément trois boules ; on suppose que toutes les boules ont la même chance d'être prélevées.

1-a) -Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule portant le chiffre 2 ?

b) -Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules portant le même chiffre?

2 - On désigne par X la somme des chiffres portés par les trois boules.

a) - Déterminer la loi de probabilité de X; calculer son espérance mathématique.

b) - Définir et représenter la fonction de répartition F de X.

EXERCICE N°12

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre "couleurs" : pique; trèfle; carreau et cœur ; chaque "couleur" comprend huit cartes dont une carte as.

1)- On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : "Les trois cartes sont des as"

B : il y a au moins 2 "couleurs" parmi ces 3 cartes.

C : "il n'y a pas d'as parmi les' 3 cartes"

2) - On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes. Le nombre de cours tiré définit une variable aléatoire X. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X; la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

EXERCICE N°13

Une boîte contient 5 jetons : 2 jetons noirs et 3 jetons blancs; indiscernables au toucher.

1) On extrait simultanément au hasard 2 jetons de la boîte

a) Calculer la probabilité des événement suivants

. $E =$ "on extrait 2 jetons noirs "

. $F =$ "on extrait 2 jetons de même couleur "

b) on désigne par x la variable aléatoire égate au nombre de jetons noirs obtenus

Définir la loi de probabilité de x et calculer son espérance mathématique

2) On effectue un tirage successif de 2 jetons de la boîte; de la manière suivante :

on tire un jeton de la boîte; on note sa couleur et on le remet dans la boîte en ajoutant en plus dans la boîte un autre jeton de la même couleur que celui qu'on a titré ; on tire ensuite un second jeton de la boîte; on considère les événements suivants :

$\mathrm{N_i} =$ "on obtient un jeton noir au premier tirage".

$\mathrm{N_2} =$ "on obtient un jeton noir au second tirage".

$B_1 =$ "on obtient un jeton blanc au premier tirage".

a) - Calculer la probabilité de N_2 sachant $N_1 : p(N_2/N_1)$

- Puis la probabilité de N_2 sachant B_1 : $p(N_2/B_1)$.

b) - En déduire $p(\mathrm{N_2})$

EXERCICE N°14

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne ; on note $p_i i \in \{1;2;3;4;5;6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres p_1; $p_2; p_3; p_4; p_5$ et p_6 sont dans cette ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$:

1-a) - Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$.

b) - En déduire $p_2; p_3; p_4; p_5$ et p_6.

2) - On tire trois fois de, suite et avec remise un jeton de cette urne; on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

a) -Déterminer la loi de probabilité de X.

b) - Déterminer l'espérance mathématique de X puis son écart-type.

3) - Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) - Déterminer la loi de probabilité de S.

b) - On gagne à ce jeu lorsque $s \geq 4$. Déterminer la probabilité de gagner.

EXERCICE N°15

a) Résoudre dans C l'équation $(E): z^2 - 2z + 2 = 0$.

On désigne par z_1; la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution de (E).

b) Dans le plan complexe rapporte à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm; on considère les points $A; B$ et C 'd'affixes respectives $z_1; z_2$ et $\sqrt{3} + 1$; Placer les points A; B et C.

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

2. Résoudre l'équation différentielle: $y'' - 2y' + 2y = 0$.

On considère l'équation différentielle (1) : $ay" - by' + cy = 0$; où a; b et c désignent trois paramètres; éléments de l'ensembles $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Pour déterminer $a; b$ et c; on lance trois fois de suite un dé cubiquè

parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face du dé.
Le premier numéro sorti donne la valeur de a; le deuxième la valeur de b et le troisième; celle de c.
a) Justifier-que l'équation différentielle (1) : $ay" - by' + cy = 0$
a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto (A\cos\ x + B\sin\ x)e^x$; ou A et B sont des réels si et seulement si $1 + i$ est solution dans C de l'équation du second degré en z; $az^2 - b\bar{z} + c = 0$.
b) Calculer la probabilité de l'événement: les solutions de (1) sont les fonctions de la forme $x \mapsto (A\cos\ x + B\sin\ x)e^x$; A et B étant des constantes réelles.

EXERCICE N°16

Une urne contient 5 jetons portant les réels : $-\sqrt{2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}$, et $\sqrt{2}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne. On appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxième jeton et on construit le nombre complexe : $z = x + iy$

1°) Combien de nombre complexes peut -on ainsi construire ?
2°) Quelle est la probabilité d'obtenir :
- Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.
- Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$
3°) On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à l'issu de ces trois tirages associe le nombre de nombre complexes de module $\sqrt{2}$
Déterminer la loi de probabilité de X.

EXERCICE N°17

Un sac contient six boules rouges numérotés de 1 à 6 et trois boules blanches numérotés de 1 à 3. On extrait simultanément deux boules ;

on note a et b les numéros portés par ces deux boules. On admet l'équiprobabilité de sortie de toutes les paires de boules :

1) Quelle est la probabilité pour qu'on ait $a = b$?

2) Quelle est la probabilité pour que 2 boules tirées soient de couleurs différentes ?

3) A chaque tirage de deux boules on associe la variable aléatoire X définie par :

- si les deux boules sont blanches, X prend la valeur $a + b$
- si les deux boules tirées sont rouges, X prend la valeur $|a - b|$.
- si les deux boules sont de couleurs différentes, X prend la valeur 0 .

  a) Déterminer la loi de probabilité de X.

  b) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.