



ANALYSE 1

Institut MBACKÉ MATHS

Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez

ANALYSE

TD : NOMBRES REELS

LICENCE 1

CORRECTION DISPONIBLE DANS NOS COURS D'ENCADREMENT EN LIGNE INTERNATIONALE

+221 70 713 09 21

YOUTUBE : MBACKE MATHS

ANALYSE 1

ANNEE : 2024-2025

NIVEAU : LICENCE 1

◇ **EXERCICE N°1**

1) Soient a, b deux réels. Montrer que $(a < x, \forall x > b) \Rightarrow (a \leq b)$.

2) Montrer que pour tout nombre réel x . $|x^2| = |x|^2 = x^2$

◇ **EXERCICE N°2**

1) Soit p un nombre premier. Montrer que \sqrt{p} est irrationnelle.

2) Montrer qu'il n'existe pas de rationnel de carré 12

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ est irrationnel.

◇ **EXERCICE N°3**

En utilisant le fait que \mathbb{Q} est archimédien, montrer que si $x, y, z \in \mathbb{Q}$ est archimédien, montrer que si $x, y, z \in \mathbb{Q}$ sont tels que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, $x \leq y \leq x + \frac{z}{n}$, alors $x = y$

◇ **EXERCICE N°4**

1) Montrer que l'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est borné et donner son supremum et son infimum.

L'ensemble A a-t-elle un plus grand élément, un plus petit élément ?

2) On donne $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ est un nombre premier} \right\}$. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$ s'ils existent.

3) Que peut-on dire d'un sous-ensemble non vide A de \mathbb{R} tel que $\inf A = \sup A$?

◇ EXERCICE N°5

Trouver les infimum et supremum des ensembles suivants

- $A = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$
- $B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$
- $C = \{a - b, 1 < a < 2, 3 < b < 4\}$
- $D = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$
- $E = \left\{ \frac{x}{1+x}, |x| > 0 \right\}$

◇ EXERCICE N°6

Soient A et B deux sous-ensembles non vides bornés de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$kA = \{ka, a \in A\}, k + A = \{k + a, a \in A\}, A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

- 1) Montrer que si $k > 0$, $\inf(kA) = k \inf A$ et $\sup(kA) = k \sup A$
- 2) Montrer que si $k < 0$, $\inf(kA) = k \sup A$ et $\sup(kA) = k \inf A$
- 3) Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$
- 4) Montrer que
$$\sup(A \cup B) = \sup \{\sup A, \sup B\} \text{ et } \inf(A \cup B) = \inf \{\inf A, \inf B\}$$
- 5) Qu'en est-il de $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$?

◇ EXERCICE N°7

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$.

- 1) Prouver l'existence de $\sup A$ et de $\inf B$ et montrer que $\sup A \leq \inf B$
- 2) Montrer que $(\sup A = \inf B) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \exists y \in B / |x - y| < \varepsilon)$

◇ EXERCICE N°8

Soit x un nombre réel

- 1) Montrer qu'il existe un unique entier $n_x \in \mathbb{Z}$ tel que $n_x \leq x < n_x + 1$.
L'entier n est appelé l'entière de x et est noté $E(x)$ ou $[x]$
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}, E(x + n) = E(x) + n$
- 3) Montrer que $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$
- 4) Résoudre les équation $E(3x + 2) = x^2$ et $E\left(\frac{1}{x}\right) = 4x - 3$

◇ EXERCICE N°9

- 1) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
 - (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$
 - (b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- 2) Soient x et a deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $|x - a| < |a|$
 - (a) Démontrer que $a - |a| < x < a + |a|$
 - (b) En déduire que x est du signe de a

◇ EXERCICE N°10

Soient a_i, b_i avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ des nombres réels arbitraires.

- 1) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)$$

- 2) En déduire l'inégalité de Minkowski

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

3) On suppose que $a_i > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right]^{-1}$$



Institut

MBACKÉ MATHS

Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez